Exercice 1

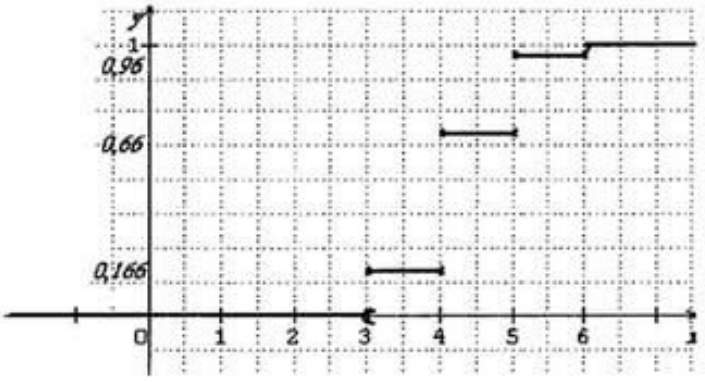
1) $X(\Omega) = \{3, 4, 5, 6\}$

- $p(X=3) = \dfrac{C_6^3}{C_{10}^3} = \dfrac{20}{120}$
- $p(X=4) = \dfrac{C_6^2 \times C_4^1}{C_{10}^3} = \dfrac{60}{120}$
- $p(X=5) = \dfrac{C_6^1 \times C_4^2}{C_{10}^3} = \dfrac{36}{120}$
- $p(X=6) = \dfrac{C_4^3}{C_{10}^3} = \dfrac{4}{120}$

2) soit F la fonction de répartition de la variable X :

$$F(X) = \begin{cases} 0 & x \in]-\infty, 3[\\ \dfrac{20}{120} & x \in [3, 4[\\ \dfrac{80}{120} & x \in [5, 6[\\ \dfrac{116}{120} & x \in [4, 5[\\ 1 & x \in [6, +\infty[\end{cases}$$

Représentation graphique de F(X)



Exercice 2

On a :

$F(-2) = p(X \leq -2) = 0,1$

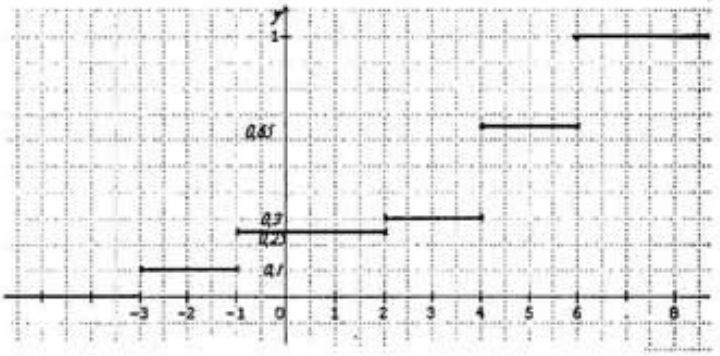
$F(0) = p(X \leq 0) = 0,25$

$F(4,2) = p(X \leq 4,2) = 0,65$

La fonction de répartition de X est définie ainsi :

$$F(X) = \begin{cases} 0 & si \ x \in]-\infty, -3[\\ 0,1 & si \ x \in [-3, -1[\\ 0,25 & x \in [-1, 2[\\ 0,3 & x \in [2, 4[\\ 0,65 & si \ x \in [4, 6[\\ 1 & si \ x \in [6, +\infty[\end{cases}$$

Représentation graphique de F(X)



Exercice 3

On sait que :

$$E(X) = \sum_i x_i p_i = -2a - 1x0,15 + 2x0,25 + 4b + 6x0,1$$

$$= -2a + 4b + 0,95 \text{ or } E(X) = 1,05$$

D'où $-2a + 4b = 1,05 - 0,95 = 0,1$

De plus on sait que : $\sum_i p_i = 1$

$\Rightarrow a + 0,15 + 0,25 + b + 0,1 = 1$

$\Rightarrow a + b + 0,5 = 1 \Rightarrow a + b = 0,5$

Donc a et b vérifie :

$$\begin{cases} -2a + 4b = 0,1 \\ a + b = 0,5 \end{cases} \overset{(1)\boxed{-}\boxed{2}(2)}{\Rightarrow} 6b = 1,1 \Rightarrow b = \frac{11}{60}$$

Et par suite : $a = 0,5 - b = \dfrac{30}{60} - \dfrac{11}{60} = \dfrac{19}{60}$

$\Rightarrow$ $\boxed{a = \dfrac{19}{60} \text{ et } b = \dfrac{11}{60}}$

Exercice 4

On désigne par R, B, V et J les évènements :

R « tirer une boule rouge » B « tirer une boule bleue »

V « tirer une boule verte » J « tirer une boule jaune »

1) r, b, v et j vérifient : $\frac{r}{1}=\frac{b}{2}=\frac{v}{3}=\frac{j}{4}$

$\Rightarrow$ 2r = b ; 3r = v et 4r = j et aussi :
r + b + v + j = 20

$\Rightarrow$ r + 2r + 3r + 4r = 20 $\Rightarrow$ 10r = 20

Par suite : r = 2 ; b = 4 ; v = 6 et j = 8

Finalement • $p(R)=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$; $p(B)=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$

• $p(V)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$ Et $p(J)=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$

2) a) $X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$

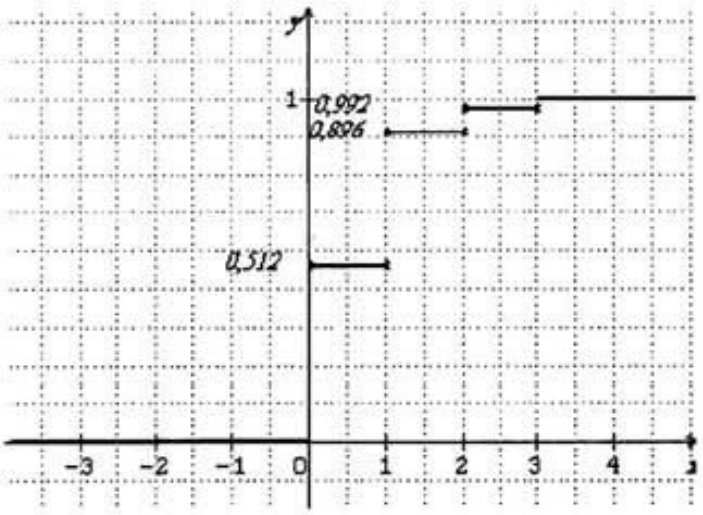
b) X suit une loi binomiale de paramètre n = 3 et $p = p(B)=\frac{1}{5}$ donc

$$\boxed{p(X=k)=C_3^k(\frac{1}{5})^k(\frac{4}{5})^{3-k};\quad k\in\{0,1,2,3\}}$$

$$p(X=0)=(\frac{4}{5})^3=\frac{64}{125}$$
$$p(X=1)=3x\frac{1}{5}x(\frac{4}{5})^2=\frac{48}{125}$$
$$p(X=2)=3x(\frac{1}{5})^2x\frac{4}{5}=\frac{12}{125}$$
$$p(X=3)=(\frac{1}{5})^3=\frac{1}{125}$$

c) La fonction de répartition de X est définie ainsi :

$$F(X)=\begin{cases}0 & si\ x\in]-\infty,0[\\ \frac{64}{125} & si\ x\in[0,1[\\ \frac{112}{125} & x\in[1,2[\\ \frac{124}{125} & x\in[2,3[\\ 1 & si\ x\in[3,+\infty[\end{cases}$$



d) $E(X)=n\sqcup p=3.\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$

$V(X)=n\sqcup p\sqcup(1-p)=3.\frac{1}{5}(1-\frac{1}{5})=\frac{12}{5}$

Exercice 5

1B-1R-3N

1) pour qu'il reste dans l'urne deux couleurs il suffit de tirer une boule blanche ou une boule rouge donc :

$$p(A)=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$$

2) Soit l'événement B : << il reste dans l'urne deux couleurs >>

On a : $card.(\Omega)=A_5^2=20$

l'événement B est réalisé si et seulement si on tire une boule rouge et une boule noire ou bien une boule blanche et une boule noire d'où :

$$p(B)=\frac{\overset{(R,N)ou(N,R)}{(A_1^1xA_3^1)x2}+\overset{(B,N)ou(N,B)}{(A_1^1xA_3^1)x2}}{20}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$$

$$\boxed{p(B)=\frac{3}{5}}$$

3) $card.(\Omega)=C_5^2=10$

a) loi de probabilité de X :

$X(\Omega)=\{1,2,3\}$

$p(X=1)=\frac{C_1^1xC_1^1}{C_5^2}=\frac{1}{10}\quad\{R,B\}$

$$p(X=2) \underset{\{R,N\}\text{ou}\{B,N\}}{=} \frac{C_1^1 x C_3^1 + C_1^1 x C_3^1}{C_{10}^3} = \frac{6}{10}$$

$$p(X=3) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10} \quad \{N,N\}$$

$$b)\ E(X) = \sum_i x_i p_i = \frac{1}{10} + \frac{12}{10} + \frac{9}{10} = 2,2$$

c) la loi de probabilité de x est donnée dans le tableau suivant :

x_i	1	2	3	Total
p_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	1
$x_i p_i$	$\frac{1}{10}$	$\frac{12}{10}$	$\frac{9}{10}$	$E(X)=\frac{22}{10}$
$x_i^2 p_i$	$\frac{1}{10}$	$\frac{24}{10}$	$\frac{27}{10}$	$E(X^2)=\frac{52}{10}$

- On a donc : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$= \sum_i x_i^2 p_i - [E(X)]^2$$

$$= \frac{52}{10} - (\frac{22}{10})^2$$

$$= \frac{520-484}{100} = \frac{36}{100}$$

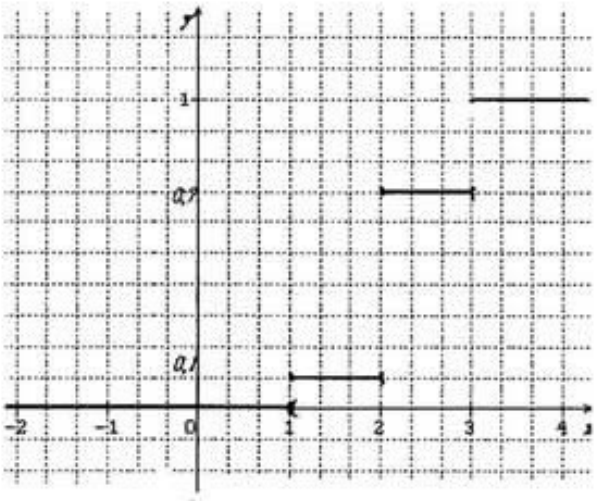
$$\Rightarrow \boxed{V(X) = 0,36}$$

- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{6}{10} = 0,6 \Rightarrow \boxed{\sigma(X) = 0,6}$

d) La fonction de répartition de X est définie par:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & x \in]-\infty,1[\\ 0,1 & x \in [1,2[\\ 0,7 & x \in [2,3[\\ 1 & x \in [3,+\infty[\end{cases}$$

Représentation graphique de F(X)



Exercice 6

9B - 1R

1) $\text{card.}(\Omega) = C_{10}^3 = 120$

Soit l'événement R : << obtenir une boule rouge >> on a :

$$p(R) = \frac{C_1^1 x C_9^2}{C_{10}^3} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

2) Dans cette expérience la variable X suit une loi binomiale de paramètre n = 5 et p = p (R) = $\frac{3}{10}$ donc

$$\boxed{p(X=k) = C_5^k (\frac{3}{10})^k (\frac{7}{10})^{5-k};\quad k \in \{0,1,2,3,4,5\}}$$

Par suite on a :

$$E(X) = nxp = 5.\frac{3}{10} = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{E(X) = 1,5}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{5x\frac{3}{10}x\frac{7}{10}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma(X) = \sqrt{1,05} = 1,025}$$

Exercice 7

Les cinq lancers du dé sont indépendants et à chaque lancer il y a deux résultats un succès (obtenir le chiffre 4) de probabilité $p = \frac{1}{4}$ et un échec donc X suit une loi binomiale B $(5, \frac{1}{4})$ d'où :

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$$\boxed{p(X = k) = C_5^k (\frac{1}{4})^k (\frac{3}{4})^{5-k}; \quad k \in \{0,1,2,3,4,5\}}$$

Aussi on a : $E(X) = nxp = 5.\frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow \boxed{E(X) = 1,25}$

Exercice 8

a) X suit une loi binomiale B $(100, \frac{1}{50})$ donc :

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, \ldots, 100\}$

$$\boxed{p(X = k) = C_{100}^k (\frac{1}{50})^k (\frac{49}{50})^{100-k}; \quad k \in \{0,1,2,\ldots,100\}}$$

b) $E(X) = nxp = 100.\frac{1}{50} = 2$

Exercice 9

V1-V1* B0-B1-B (-1)

1) On désigne par F l'événement : obtenir face au cour du lancer de la pièce de monnaie on a $p(F) = \frac{1}{2}$

Soit $\overline{F}$ 'événement contraire de F c'est-à-dire obtenir la face pile au cour du lancer de la pièce de monnaie

a) D'après le principe de probabilité totale on a :

$$p(A) = p(F \cap A) + p(\overline{F} \cap A)$$
$$= p(F).p(A \mid F) + p(\overline{F}).p(A \mid \overline{F})$$
$$= \frac{1}{2} x \frac{C_3^1 x C_1^1}{C_5^2} + \frac{1}{2} x \frac{(3^1 x 1^1) x 2 + 1^2}{5^2}$$
$$= \frac{3}{20} + \frac{7}{50} = \frac{29}{100} \Rightarrow \boxed{p(A) = 0,29}$$

b) C'est l'événement : obtenir face sachant que A est réalisé donc :

$$p(F \mid A) = \frac{p(F \cap A)}{p(A)} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{29}{100}} = \frac{15}{29}$$

c) • Soit Y l'aléa numérique prenant pour valeur le nombre de fois où l'événement A est réalisé au cours des n épreuves repérées de la même manière et qui sont indépendantes ainsi Y suit une loi binomiale de paramètre n et $p = p(A) = \frac{29}{100}$

On a : $p_n = 1 - p(Y = 0)$

$$= 1 - C_n^0 (\frac{29}{100})^0 (\frac{71}{100})^n$$

D'où $\boxed{p_n = 1 - (\frac{71}{100})^n}$

• $p_n \geq 0,95 \Leftrightarrow 1 - (\frac{71}{100})^n \geq 0,95$

Ln : log népérien

$\Leftrightarrow (\frac{71}{100})^n \leq 0,05 \Leftrightarrow Ln(\frac{71}{100})^n \leq \ln(0,05)$

$\Leftrightarrow n Ln(\frac{71}{100}) \leq \ln(0,05) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,05)}{Ln(\frac{71}{100})}$

$\Leftrightarrow n \geq 8,746$

Conclusion : le plus petit entier n vérifiant $p_n \geq 0,95$ est n = 9

2) • Loi de probabilité de X:

$X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$

$p(X = 1) = \frac{3}{5} = \frac{6}{10} \longrightarrow (B, \ldots.)$

$p(X = 2) = \frac{2}{5} x \frac{3}{4} = \frac{3}{10} \longrightarrow (V, B \ldots.)$

$$p(X=3) = \frac{2}{5} x \frac{1}{4} x \frac{3}{3} = \frac{1}{10} \longrightarrow$$

$(V, V, B....)$

- $E(X) = \sum_i x_i p_i = 1x\frac{6}{10} + 2x\frac{3}{10} + 3x\frac{1}{10}$

$\Rightarrow$ $\boxed{E(X) = 1,5}$

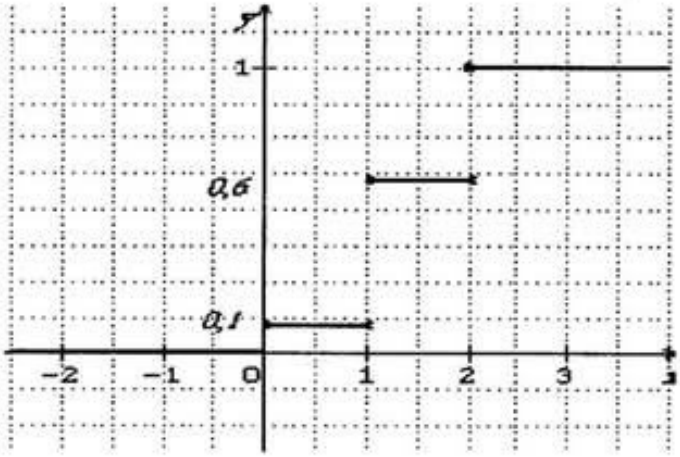
Exercice 10 Voir exercice 8 (mêmes énoncés)

Exercice 11

1) a) La fonction de répartition de X est définie par:

$$\begin{cases} F(x) = 0 & x \in]-\infty, 0[\\ F(x) = 0,1 & x \in [0,1[\\ F(x) = 0,6 & x \in [1,2[\\ F(x) = 1 & x \in [2,+\infty[\end{cases}$$

Représentation graphique de F(X) :



b) $E(X) = \sum_i x_i p_i = 0x0,1 + 1x0,5 + 2x0,4$

$\Rightarrow$ $\boxed{E(X) = 1,3}$

2) a) $p(C_1 \cap E) = p(C_1).\ p(E \mid C_1) = p_1 \times 0,7 = 0,5x0,7$

$\Rightarrow$ $\boxed{p(C_1 \cap E) = 0,35}$

b) deux clients se présentent à la station et un seul achète de l'essence donc le premier va acheter de L'essence et le second de gazoil ou bien le premier va acheter de gazoil et le second de l'essence

D'où $p(E \mid C_2) = 0,3x0,7 + 0,7x0,3 = 0.-,42$

$p(C_2 \cap E) = p(C_2).\ p(E \mid C_2)$

$= p_2 \times 0,42 = 0,4x0,42$

$\Rightarrow$ $\boxed{p(C_2 \cap E) = 0,168}$

c) Soit l'événement C_0 : en cinq minute aucun client se présente à la station, $\{C_0, C_1, C_2\}$ est un système complet donc on appliquant le principe de probabilité totale on trouve :

$p(E) = p(E \cap C_0) + p(E \cap C_1) + p(E \cap C_2)$

$= 0 + 0,35 + 0,168$

Donc $\boxed{p(E) = 0,518}$

3) $Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

L'événement (y = 0) c'est que les deux clients achètent de gazoile où aucun client n'arrive à la station ou un seul client arrive à la station et achète de gazoile on aura :

$p(y = 0) = (0,3x0,3)x0,4 + 0,1x1 + 0.5x0,3 = 0,286$

$p(y = 1) = p(E) = 0,518$

$p(y = 2) = (0,7x0,7)x0,4 = 0,196$

Conclusion

x_i	1	2	3	total
p_i	0,286	0,518	0,196	1

Exercice 12

$\boxed{0,0,2}$ $\boxed{1,1,3,4}$

B_1 B_2

1) Utilisant un tableau donnant tout les produit pòssibles obtenus au cour de cette épreuve:

X	1	1	3	4
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
2	2	2	6	8

Donc la loi de probabilité de X est :

$X(\Omega) = \{0, 2, 6, 8\}$

$p(X=0) = \frac{8}{12}$, $p(X=2) = \frac{2}{12}$

$p(X=6) = \frac{1}{12}$, $p(X=8) = \frac{1}{12}$

2) Soit Y la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de fois où on obtient un produit supérieur à quatre .Y suit une loi binomiale de paramètre n = 3 et de $p = p(x>4) = p(X=6) + p(X=8) \Rightarrow p = \frac{1}{6}$

D'où :

a) $p(Y=2) = C_3^2.(\frac{1}{6})^2.(\frac{5}{6})^1 = \frac{5}{12}$

b) $p(Y=0) + p(Y=2) = C_3^0.(\frac{1}{6})^0.(\frac{5}{6})^3 + C_3^1.(\frac{1}{6})^1.(\frac{5}{6})^2$

$= \frac{125}{216} + \frac{75}{216} = \frac{25}{27}$

3) a) $p_1 = \frac{1}{3}$; $p_2 = \frac{2}{3} x \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

et $p_3 = \frac{2}{3} x \frac{2}{3} x \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$

le (n – 1) premier tirage sont des jetons numérotes 0 et le n^{me} tirage est le jeton numéroté 2 donc :

$$\boxed{p_n = (\frac{2}{3})^{n-1}.\frac{1}{3}}$$

b) $S_n = \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3}.(\frac{2}{3})^{i-1} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} (\frac{2}{3})^{i-1}$

$= \frac{1}{3}.\frac{1-(\frac{2}{3})^n}{1-\frac{2}{3}} \Rightarrow S_n = 1-(\frac{2}{3})^n$

somme des n termes d'une suite géométrique

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left[1 - (\frac{2}{3})^n\right] = 1$$

Exercice 13

1) $p(A) = (\frac{3}{6} x \frac{1}{6}) x 2 + (\frac{3}{6} x \frac{2}{6}) x 2 + (\frac{1}{6} x \frac{2}{6}) x 2$

(-1,0) ou (-1,1) ou (0,1)

$= \frac{6+12+4}{36} \Rightarrow \boxed{p(A) = \frac{11}{18}}$

$p(B) = (\frac{3}{6} x \frac{2}{6}) x 2 + (\frac{1}{6})^2 \Rightarrow \boxed{p(B) = \frac{13}{36}}$

(-1,1) ou (0,0)

2) l'événement C est l'événement A sachant B :

$p(C) = p(A \mid B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$

• $A \cap B$ C'est l'événement obtenir une somme nulle ave deux numéros différents c'est-à-dire obtenir le couple (-1, 1)

$\Rightarrow p(A \cap B) = (\frac{3}{6} x \frac{2}{6}) x 2 = \frac{12}{36}$

Par suite :

$p(C) = \frac{\frac{12}{36}}{\frac{13}{36}} \Rightarrow \boxed{p(C) = \frac{12}{13}}$

3) Utilisant un tableau donnant tout les sommes possibles obtenus au cour de cette épreuve:

+	-1	-1	-1	0	1	1
-1	-2	-2	-2	-1	0	0
-1	-2	-2	-2	-1	0	0
-1	-2	-2	-2	-1	0	0
0	-1	-1	-1	0	1	1
1	0	0	0	1	2	2
1	0	0	0	1	2	2

a) Loi de probabilité de X :

$X(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

- $p(X=-2) = \frac{9}{36}$ • $p(X=-1) = \frac{6}{36}$
- $p(X=0) = \frac{13}{36}$ • $p(X=1) = \frac{4}{36}$
- $p(X=2) = \frac{4}{36}$

b) $p(X>0) = p(X=1) + p(X=2) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

$$\boxed{p(X>0) = \frac{2}{9}}$$

Exercice 14

$B_1\ B_{-1}\ N_1\ N_1\ N_{-1}$

1) $card.(\Omega) = C_5^2 = 10$

a) $p(A) = \frac{C_2^2}{10} + \frac{C_3^2}{10} = \frac{2}{5}$

$p(B) = \frac{C_2^2}{10} = \frac{1}{10}$

b) les valeurs prises par X sont $X(\Omega) = \{-2, 0, 2\}$

$\{-1,-1\} \longrightarrow p(X=-2) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$

$\{-1,1\} \longrightarrow p(X=0) = \frac{C_3^1 \times C_2^1}{C_5^2} = \frac{6}{10}$

$\{1,1\} \longrightarrow p(X=2) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$

E(X) : espérance mathématique de X

$$E(X) = \sum_i x_i p_i = -2x\frac{1}{10} + 0x\frac{6}{10} + 2x\frac{3}{10} = 0,4$$

2) P : $x + ay + b = 0$; P' : $x + by - a = 0$

Soient $\overline{N}\begin{pmatrix}1\\a\\0\end{pmatrix}$ un vecteur normal de P

$\overline{N}\begin{pmatrix}1\\a\\0\end{pmatrix}$ un vecteur normal de P'

On a donc :

- P et P' sont parallèles si et seulement si $\overline{N}$ et $\overline{N}'$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \det(\overline{N}, \overline{N}') = \begin{vmatrix}1 & 1\\ a & b\end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow b - a = 0 \Leftrightarrow a = b$

Donc l'événement C est réalisée si on tire deux jetons de même numéro par suite : p (C) =

$$\frac{A_3^2 + A_2^2}{A_5^2} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

- P et P' sont perpendiculaires si et seulement si $\overline{N}$ et $\overline{N}'$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \overline{N} \cdot \overline{N}' = 0$

$\Leftrightarrow 1 + ab = 0 \Leftrightarrow ab = -1$

Donc l'événement D est réalisée si on tire deux jetons deux numéros distincts d'où :

$p(D) = p(\overline{C}) = 1 - p(C) = \frac{3}{5}$

$$\boxed{p(C) = \frac{2}{5} \text{ et } p(D) = \frac{3}{5}}$$

Exercice 15

$\underbrace{|N,N,B,B,B|}_{U_1}$ $\underbrace{|N,N,N,B,B|}_{U_2}$

1) On considère l'événement A << obtenir le chiffre 0 au cours du lancer du dé cubique >> $p(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

D'après le principe de probabilité totale on a :

$p(E) = p(E \cap A) + p(E \cap \overline{A})$

$= p(A).p(E \mid A) + p(\overline{A}).p(E \mid \overline{A})$

$$= \frac{2}{3}x\frac{3^2+2^2}{5^2} + \frac{1}{3}x\frac{A_3^2 + A_2^2}{A_5^2}$$

$$\Rightarrow \quad p(E) = \frac{12}{25}$$

On a seulement deux couleurs donc tirer exactement une boule noire c'est tirer deux boules de couleur différente par suite l'événement F et l'événement contraire de E d'où

$$p(F) = 1-\frac{12}{25}=\frac{13}{25}$$

2)

- Loi de probabilité de X :

$$X(\Omega)=\{0,1,2\}$$

$$p(X=0) = \frac{2}{3}x\frac{2^2}{5^2}+\frac{1}{3}x\frac{A_3^2}{A_5^2}=\frac{31}{150}$$

$$p(X=1) = p(F) = \frac{13}{25}=\frac{78}{150}$$

$$p(X=2) = \frac{2}{3}x\frac{3^2}{5^2}+\frac{1}{3}x\frac{A_2^2}{A_5^2}=\frac{41}{150}$$

- $\sigma(X)=\sqrt{E(X^2)-[E(x)]^2}$

Avec le tableau suivant on aura :

x_i	0	1	2	Total
p_i	$\frac{31}{150}$	$\frac{78}{150}$	$\frac{41}{150}$	1
x_ip_i	0	$\frac{78}{150}$	$\frac{82}{150}$	$E(X)=\frac{160}{150}$
$x_i^2p_i$	0	$\frac{78}{150}$	$\frac{164}{150}$	$E(X^2)=\frac{242}{150}$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{242}{150}-\left[\frac{160}{150}\right]^2}=0,69$$

Exercice 16

$\boxed{N_0,N_2,N_2,B_0,B_0,B_1}$ $\quad$ $\boxed{N_0,N_0,N_0,N_1,B_0,B_1}$

S_1 $\quad$ S_2

1) Soit l'événement A_1 << obtenir le chiffre 1 au cours du lancer du dé >> $p(A_1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

a) D'après le principe de probabilité totale on a :

$$p(B) = p(B\cap A_1)+p(B\cap\overline{A_1})$$
$$= p(A_1).p(B\mid A_1)+p(\overline{A_1}).p(B\mid\overline{A_1})$$

$$=\frac{1}{3}x\frac{C_3^2}{C_6^2}+\frac{2}{3}x\frac{A_4^3}{A_6^3}$$

$$\Rightarrow \quad p(B) = \frac{1}{5}$$

De même :

$$p(A) = p(A\cap A_1)+p(A\cap\overline{A_1})$$
$$= p(A_1).p(A\mid A_1)+p(\overline{A_1}).p(A\mid\overline{A_1})$$

Or l'événement $(A\mid A_1)$ est impossible car il n y a pas des jetons noirs numérotés 1 dans le sac S_1

$$p(A) = p(A_1).p(\emptyset)+p(\overline{A_1}).p(A\mid\overline{A_1})$$

$$p(A) = \frac{1}{3}x0+\frac{2}{3}x\frac{(A_1^1xA_5^2)x3}{A_6^3}$$

$$\Rightarrow \quad p(A) = \frac{1}{3}$$

b) Faire des tirages dans S_1 sachant que les jetons sont noirs est l'événement A_1 sachant B :

$$p(A_1\mid B)=\frac{p(A_1\cap B)}{p(B)}=\frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{5}}=\frac{1}{3}$$

c) Loi de probabilité de X :

$$X(\Omega)=\{0,1,2,3,4\}$$

- $p(X=0) = \frac{1}{3}x\frac{C_3^2}{C_6^2}+\frac{2}{3}x\frac{A_4^3}{A_6^3}=\frac{9}{45}$
- $p(X=1) = \frac{1}{3}x\frac{C_3^1xC_1^1}{C_6^2}+\frac{2}{3}x\frac{(A_4^2xA_2^1)x3}{A_6^3}=\frac{21}{45}$
- $p(X=2) = \frac{1}{3}x\frac{C_3^1xC_2^1}{C_6^2}+\frac{2}{3}x\frac{(A_2^2xA_4^1)x3}{A_6^3}=\frac{12}{45}$
- $p(X=3) = \frac{1}{3}x\frac{C_1^1xC_2^1}{C_6^2}+\frac{2}{3}x0=\frac{2}{45}$ Événement impossible
- $p(X=4) = \frac{1}{3}x\frac{C_2^2}{C_6^2}+\frac{2}{3}x0=\frac{1}{45}$ Événement impossible

Conclusion

x_i	0	1	2	3	4	Total
p_i	$\frac{9}{45}$	$\frac{21}{45}$	$\frac{12}{45}$	$\frac{2}{45}$	$\frac{1}{45}$	1
$x_i p_i$	0	$\frac{21}{45}$	$\frac{24}{45}$	$\frac{6}{45}$	$\frac{4}{45}$	$E(X)=\frac{55}{45}$
$x_i^2 p_i$	0	$\frac{21}{45}$	$\frac{48}{45}$	$\frac{18}{45}$	$\frac{16}{45}$	$E(X^2)=\frac{103}{45}$

D'où $\sigma(X)=\sqrt{E(X^2)-[E(x)]^2}$

$$=\sqrt{\frac{103}{45}-\left[\frac{11}{9}\right]^2} \Rightarrow \boxed{\sigma(X)=0,89}$$

d) La probabilité d'obtenir le jeton noir numéroté 1 parmi les jetons tirés pour la première fois à la troisième épreuve est la probabilité telle que A est réalisé pour la première fois à la troisième épreuve donc

$$p = p(\overline{A}).p(\overline{A}).p(A) = \frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{1}{3} = \frac{4}{27}$$

2) a) • Pour et à chaque épreuve il y en a deux résultats telle que l'apparition du chiffre 2 (succès) ou non et Les épreuves sont indépendantes et identiques

Donc Y suit une loi binomiale de paramètres:

$$n = 3 \quad \text{et } p = p(\overline{A}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

D'où $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$

$$\boxed{p(X=k) = C_3^k \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{3-k};\ k \in \{0,1,2,3\}}$$

b) • $E(X) = n \sqcup p = 3\frac{2}{3} = 2 \Rightarrow \boxed{E(X)=2}$

• $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{3x\frac{2}{3}x\frac{1}{3}}$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma(X) = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,82}$$

Exercice 17

1) a) $p(A) \overset{\{-2,-1,2\}}{=} \frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{10}$

B: tirer les deux jetons numérotés 1 et un jeton parmi $\{-2,-1,2\}$

$$\Rightarrow p(B) = \frac{C_2^2 x C_3^1}{C_5^3} = \frac{3}{10}$$

b) S est réalisée si l'on tire les deux jetons n°1 et le jeton n° (– 1) ou bien on tire un jeton n° 1 et les deux jetons numérotés 2 et – 2 ainsi ona :

$$p(S) = \frac{C_2^2 x C_1^1 + C_2^1 x C_1^1 x C_1^1}{C_5^3} = \frac{1+2}{10} = \frac{3}{10}$$

2) a) X suit une loi binomiale de paramètres: n = 3 et $p = p(S) = \frac{3}{10} = 0,3$ on a donc :

$$X(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5\}$$

$$\boxed{p(X=k) = C_5^k (0,3)^k (0,7)^{5-k};\ k \in X(\Omega)}$$

b) $E(X) = n \sqcup p = 5 \sqcup (0,3) \Rightarrow \boxed{E(X)=1,5}$

$V(X) = n \sqcup p.(1-p) = 5 \sqcup (0,3)\ (0,7) \Rightarrow \boxed{V(X)=1,05}$

Exercice 18

1) x est une variable aléatoire continue qui suit une Loi de probabilité uniforme sur l'intervalle [0,50]

$$E(X) = \frac{0+50}{2} = 25$$

2) $p(20 \le X \le 25) = \frac{25-20}{50-0} = \frac{1}{10} = 0,1$

Exercice 19 !

$Y = X^2$: une variable aléatoire réelle uniforme sur l'intervalle [0,1] de densité $f = 1$

$$E(y = x^2) = \int_0^1 x f(x)dx$$

$$= \int_0^1 x.x^2 dx = \int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$V(Y1 = \int_0^1 x^2 f(x)dx - E(Y)^2$$

$$= \int_0^1 x^4 dx - (\frac{1}{4})^2 = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 - \frac{1}{16} = \frac{1}{5} - \frac{1}{16} = 0,1375$$

Exercice 20 !!

La loi du temps d'attente X de ce client est une variable aléatoire réelle uniforme sur l'intervalle [0,20]

$E(X) = \frac{20+0}{2} = 10$

Exercice 21(6 lampes???)

a) * $f(t) = \frac{1}{4}e^{-\frac{t}{4}}$

$\forall\ t \in [0, +\infty[$ on a : $f(t) \geq 0$

$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t).dt = \lim_{x \to +\infty} \left[-e^{-\frac{t}{4}}\right]_0^x$

$= \lim_{x \to +\infty} \left(1 - e^{-\frac{x}{4}}\right) = 1$

Conclusion : f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire positive

** $E(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x t.f(t).dt$: en intégrant par parties en trouve $E(X) = 4$

Ou bien on remarquera que f est une densité de probabilité d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{4}$.

Donc $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 4 \Rightarrow \boxed{E(X) = 4 \text{ ans}}$

$V(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x t^2.f(t).dt - E(X)^2$

$= \frac{1}{\lambda^2} = 16 \Rightarrow \boxed{V(X) = 16}$

b) $p(0 \leq X \leq 6) = \int_0^6 f(t).dt$

$= e^{-\lambda \times 0} - e^{-\lambda \times 6} = 1 - e^{-\frac{3}{2}}$

$\boxed{p(0 \leq X \leq 6) \sqcup 0{,}776}$

Remarque : la probabilité pour que cette appareil fonctionne de façon continue pendant 6 ans est exactement la probabilité qu'une seule lampe fonctionne de façon continue pendant 6ans car les 6 lampes sont tous nécessaires au même temps pour cette appareil

Exercice 22

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{2}x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

1) $\forall\ x \in [0, +\infty[$ on a : $0 \leq e^{-\frac{1}{2}x} \leq 1$ donc

$0 \leq 1 - e^{-\frac{1}{2}x} \leq 1$ d'où $\boxed{0 \leq F(X) \leq 1}$ (1)

$\boxed{\lim_{x \to -\infty} F(X) = 0}$ (2)

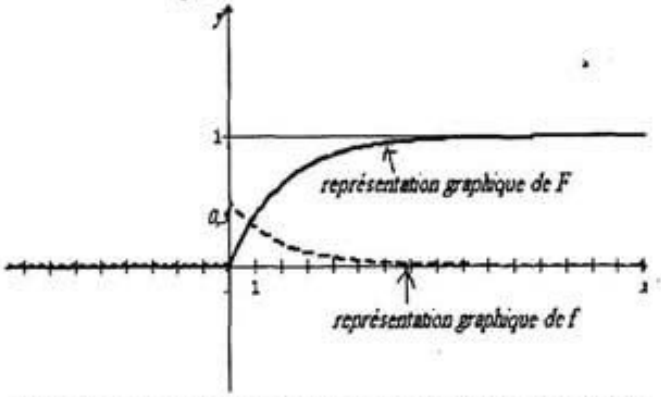
$\lim_{x \to +\infty} F(X) = \lim_{x \to +\infty} (1 - e^{-\frac{1}{2}x}) = 1 \Rightarrow$

$\boxed{\lim_{x \to +\infty} F(X) = 1}$ (3)

Les résultats (1), (2) et (3) prouvent que F satisfaite aux propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire continue X

2) La fonction f: dérivée de F est la densité de probabilité de X d'où :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$



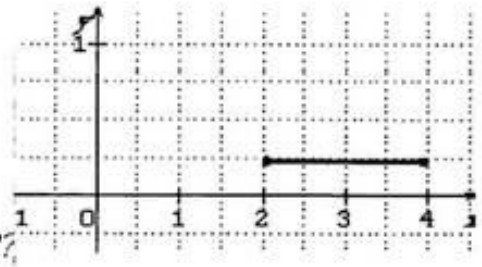
4) a) On pourra remarquer que X est une variable Aléatoire continu suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{2}$

Donc $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 2 \Rightarrow \boxed{E(X) = 2}$

$V(X) = \frac{1}{\lambda^2} = 4 \Rightarrow \boxed{V(X) = 4}$

b) $p(2 \le X \le 4) = e^{-\frac{1}{2}2} - e^{-\frac{1}{2}4} = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}$

$\boxed{p(2 \le X \le 4) \sqcup 0,24}$



graphe ???

Exercice 23

1) X aléa numérique qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{10}$

$p(X \ge 10) = e^{-\frac{1}{10}10} = e^{-1} \sqcup 0,367$

2) $p(10 \le X \le 20) = e^{-\frac{1}{10}10} - e^{-\frac{1}{10}20}$

$= \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} \sqcup 0,24$

Exercice 24

1) a) durée de vie est 5 ans signifie $E(Y) = 5 = \frac{1}{a}$

Donc $\boxed{a = \frac{1}{5} = 0,2}$

b) $e^{-0,2t} = \frac{1}{2}$ (50 %) $\Leftrightarrow -0,2.t = \ln(\frac{1}{2}) = -\ln 2$

$\Leftrightarrow t = \frac{1}{0,2}.\ \ln 2 = 5\ln 2 \Leftrightarrow t \approx 3,46$

Donc la durée de la garantie est environ de 3ans et demi

c) $p(Y \ge 2) = e^{-0,2\sqcup 2} = e^{-0,4} \sqcap 0,67$

2) a) les moteurs fonctionnent de manière indépendante.

On choisi un moteur alors deux résultats sont possibles ou bien le moteur n'a pas de panne pendant les deux premières années ou bien non, par suite cette variable X suit une loi binomiale de paramètre n = 10 et $p = e^{-0,4}$

b) $E(X) = n \sqcup p \sqcup 10 \sqcup (0,67) \Rightarrow \boxed{E(X) \sqcup 6,7}$

c) Calcul ..... } !!!!

d) *f* ?? }

Exercice 25

a) $p(t) = \frac{1}{2} p(0)$ pour t = 5730 donc

$p(5730) = \frac{0,75}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{0,75}{2} = 0,75.e^{-5730\lambda} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-5730\lambda}$

$\Leftrightarrow -5730.\lambda = \ln(\frac{1}{2}) = -\ln 2$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{5730} \Leftrightarrow \lambda \approx 0.00012$

$\Leftrightarrow \boxed{\lambda \approx 12 \sqcap 10^{-5}}$

b) 10 % des particules de type A se transforment en particules de type B c'est-à-dire il reste 65 % des particules de type A d'où :

$p(t) = \frac{65}{100} = 0,65 \Leftrightarrow 0,75.e^{-12\sqcup 10^{-5}t} = 0,65$

$\Leftrightarrow e^{-12\sqcap 0^{-5}t} = \frac{0,65}{0,75} = \frac{13}{15} \Leftrightarrow t = -\frac{\ln(\frac{13}{15})}{12} \sqcap 0^5$

Donc $\boxed{t \approx 1192.}$

c) pour qu'il y a autant des particules de type A que celle de type B il suffit que 25 % des particules A se transforment en particules de type B
Donc il reste 50 % de chaque type ainsi on a :

$p(t) = \frac{50}{100} = 0,5 \Leftrightarrow 0,75.e^{-12\sqcup 10^{-5}t} = 0,5$

$\Leftrightarrow e^{-12\sqcap 0^{-5}t} = \frac{0,5}{0,75} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow t = -\frac{\ln(\frac{2}{3})}{12} \sqcap 0^5$

Donc $\boxed{t \approx 3379.}$